Lec 41 一致收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 的三个分析性质

41.1 一致收敛级数的三个分析性质

定理 41.1 (一致收敛级数的和函数的连续性)

如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于 $S(x)$, 且求和项 $u_n(x)$ 在区间 I 上连续, 则 $S(x)$ 在 I 上也连续.

证明 对任意 $x_0 \in I$, 只要证明 $\lim\limits_{x\to x_0} S(x) = S(x_0)$ 即可. 根据连续的定义, 就要估计不等式 $|S(x) - S(x_0)|$. 为此, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 由一致收敛性可知, 存在 N, 使对任何 $x \in I$ 都有

$$|S_N(x) - S(x)| < \varepsilon/3.$$

再由 $S_N(x)$ 在 x_0 的连续性（它是有限个连续函数的和）可知,$\exists\delta > 0$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时

$$|S_N(x) - S_N(x_0)| < \varepsilon/3.$$

所以, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

$$|S(x) - S(x_0)| \leqslant |S(x) - S_N(x)| + |S_N(x) - S_N(x_0)| + |S_N(x_0) - S(x_0)| < \varepsilon.$$

即 $S(x)$ 在 x_0 连续. 因此 $S(x)$ 在 I 上连续.

定理 41.2 (一致收敛级数的积分性质)

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 通项 $u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则和函数 $S(x)$ 在 $[a, b]$ 上也可积, 且

$$\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx.$$

证明 我们的主要目的是为了证明积分和无限求和的交换性. 所以不妨设 $\{u_n(x)\}$ 在 $[a, b]$ 上连续, 根据定理**??**, 和函数 $S(x)$ 也连续, 所以可积.

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$, 当 $n > N$ 时, 对所有的 $x \in [a, b]$ 有

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

故当 $n > N$ 时有

$$\left|\int_a^b S(x)dx - \int_a^b S_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b (S(x) - S_n(x))dx\right| \leqslant \int_a^b |S(x) - S_n(x)|dx < (b - a)\varepsilon.$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_a^b u_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}u_n(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)dx=\int_a^b S(x)dx.$$

因此, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$ 收敛, 而且收敛于 $\int_a^b S(x)dx$.

定理 41.3 (一致收敛级数的可微性)

设级数的求和项 $u_n(x)$ 在 $I=[a,b]$ 有连续导数, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 收敛于 $S(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 I 一致收敛, 则和函数 $S(x)$ 在 I 可微, 并有

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x).$$

证明 设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 一致收敛于 $g(x)$, 所以由定理**??** 知

$$\begin{aligned}\int_a^x g(t)dt=\int_a^x\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^x u_n'(t)dt\\=S(x)-S(a).\end{aligned}$$

所以 $S'(x)=g(x)$, 即和函数可微, 且求导和求和运算可交换.

41.2 例题

例 41.1 设有 Riemann 的 $\zeta(x)\triangleq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}, x\in(1,+\infty)$

1. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 逐点收敛且非一致收敛;
2. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中内闭一致收敛, 从而证明 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 中连续;
3. 证明 $\zeta'(x),\zeta^{(2)}(x),\cdots,\zeta^{(m)}(x),\cdots$ 中都在 $(1,+\infty)$ 中连续. 此时记作 $\zeta(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$;

证明

1. $\forall x_0\in(1,+\infty)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x_0}}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 中逐点收敛.

   设 $a_n(x)=\frac{1}{n^x}$, 则 $a_n(x)$ 在 $x=1$ 处右连续, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 非一致收敛.
2. $\forall[a,b]\subset(1,+\infty)$, 有 $\left|\frac{1}{n^x}\right|\leqslant\frac{1}{n^a}, \forall x\in[a,b], \forall n\in\mathbb{N}^*$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$ 收敛, 由一致收敛的 Weierstrass 判别法, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛, 故内闭一致收敛.

$\forall x_0\in(1,+\infty),\exists[a,b]\subset(1,+\infty)$, 使$x_0\in[a,b]$, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在 $[a,b]$ 中一致收敛, 与定理 41.1 的**??**可知 $\zeta(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^x}$ 在区间 $[a,b]$ 连续. 从而 $\zeta(x)$ 在 x_0 处连续, 结合 x_0 任意性可知 $\zeta(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 中连续.

3. $\forall x_0\in(1,+\infty),\exists[a,b]\subset(1,+\infty)$, 使$x_0\in[a,b]$, 对 $\forall x\in[a,b]$, $\left|a_n^{(m)}(x)\right|\overset{n\leqslant 2}{=}\left|\dfrac{(-1)^m}{n^x(\ln n)^m}\right|=\dfrac{1}{n^x(\ln n)^m}\overset{n\text{充分大}}{\leqslant}\dfrac{1}{n^a}$. 因此可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n^{(m)}(x)\right|\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^a},\forall x\in[a,b]$, 由一致收敛的 Weierstrass 判别法, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n^{(m)}(x)\right|$ 一致收敛, 且 $\forall m\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*,a_n^{(m)}(x)$ 连续, 因此由定理 41.1 的**??**可知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{(m)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续, 再由定理 41.1 的**??**可知,$\zeta^{(m)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{(m)}(x)$, 因此可得 $\forall m\in\mathbb{N}^*,\zeta^{(m)}(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 中连续. 即有 $\zeta(x)\in C^{\infty}(1,+\infty)$.

例 41.2 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx},x\in(0,+\infty)$, 则 $S(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$. 并求 $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 6}S(x)\,\mathrm{d}x$.

证明 设 $a_n(x)=n\mathrm{e}^{-nx}\forall x_0\in(0,+\infty),\exists[a,b]\subset(0,+\infty)$, 使$x_0\in[a,b]$, 对 $\forall x\in[a,b]$, $\left|a_n^{(m)}(x)\right|=\left|(-1)^m n^{m+1}\mathrm{e}^{-nx}\right|=n^{m+1}\mathrm{e}^{-nx}\leqslant n^{m+1}\left(\dfrac{m+3}{\mathrm{e}nx}\right)^{m+3}=\dfrac{(m+3)^{m+3}}{\mathrm{e}^{m+3}x^{m+3}n^2}$. 因此可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n^{(m)}(x)\right|\leqslant\left(\dfrac{m+3}{\mathrm{e}a}\right)^{m+3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2},\forall x\in[a,b]$, 由一致收敛的 Weierstrass 判别法, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|a_n^{(m)}(x)\right|$ 一致收敛, 且 $\forall m\in\mathbb{N}^*,\forall n\in\mathbb{N}^*,a_n^{(m)}(x)$ 连续, 因此由定理 41.1 的**??**可知,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{(m)}(x)$ 在区间 $[a,b]$ 连续, 再由定理 41.1 的**??**可知,$S^{(m)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^{(m)}(x)$, 因此可得 $\forall m\in\mathbb{N}^*,\boldsymbol{S}^{(m)}(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 中连续. 即有 $S(x)\in C^{\infty}(0,+\infty)$.

同时由一致收敛性与定理 41.1 的**??**可知,$S(x)$ 在区间 $[\ln 4,\ln 6]$ 可积, 且 $\displaystyle\int_{\ln 4}^{\ln 6}S(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\ln 4}^{\ln 6}\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\ln 4}^{\ln 6}n\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4^n}-\frac{1}{6^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$

例 41.3 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n},x\in(0,+\infty)$.

1. 证明 $a_n(x)=\dfrac{x^n\cos\frac{n\pi}{x}}{(1+2x)^n}$ 在 $(0,+\infty)$ 逐点, 绝对且一致收敛于 $f(x)$;
2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}f(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

证明 $|a_n(x)|\leqslant\dfrac{x^n}{(1+2x)^n}=\dfrac{1}{(1/x+2)^n}<\dfrac{1}{2^n},\forall x\in(0,+\infty),\forall n\in\mathbb{N}^*$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x)|$ 绝对收敛, 由 Weierstrass 判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 逐点, 绝对, 一致收敛于 $f(x)$. $\Rightarrow f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续.

$$\lim_{x\to1}f(x)=f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}=-\frac{1}{4},\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

✍ **作业** ex7.2:4(6)(7)(8),5,6,7,8,9.